Exercice 1. Cours

Exercice 2. 1. Pour deux assertions A, B quelconques, $A \oplus B$ signifie "exactement une des deux assertions est vraie".

(a)

A	B	A⊕ B
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

(b) Faisons le tableau de vérité de $(A \wedge \rceil B) \vee (\rceil A \wedge B)$:

A	B	$\rceil A$	⌉ B	(A∧⌉ B)	$(\rceil A \wedge B)$	$(A \wedge \rceil B) \vee (\rceil A \wedge B)$
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F

Les colonnes correspondant à $A \oplus B$ et à $(A \wedge \rceil B) \vee (\rceil A \wedge B)$ coïncident donc $(A \oplus B) \Leftrightarrow (A \wedge \rceil B) \vee (\rceil A \wedge B)$

2. Soit E un ensemble et soient C, D des parties de E, on définit $C \Delta D = (C \setminus D) \cup (D \setminus C)$.

(a) On a :

$$
\begin{aligned}
& x \in C \Delta D \\
\Leftrightarrow & (x \in C \setminus D) \vee (x \in D \setminus C) \text{ par définition de l'union} \\
\Leftrightarrow & (x \in C \wedge \rceil (x \in D)) \vee (x \in D \wedge \rceil (x \in C)) \text{ par définition du complémentaire} \\
\Leftrightarrow & (x \in C) \oplus (x \in D) \text{ d'après la question précédente .}
\end{aligned}
$$

(b) P est le disque unité, Q est l'union de la droite verticale et de la droite horizontale. Dessin de $P \Delta Q$ en cours.

Exercice 3. On pose les applications suivantes

$$
\begin{aligned}
f : \mathbf{Z} &\to \mathbf{Z} & \qquad g : \mathbf{Z} &\to \mathbf{Z} & \qquad h : \mathbf{Z} &\to \mathbf{Z} \\
n &\mapsto 3n+1 & n &\mapsto -n & n &\mapsto n^2 \ .
\end{aligned}
$$

1. On a $g \circ g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Soit $n \in \mathbf{Z}$, alors $(g \circ g)(n) = g(g(n)) = g(-n) = -(-n) = n$. Donc $g \circ g$ est l'identité de $\mathbf{Z}$.
2. Par définition $h(\mathbf{Z}) = \{m \in \mathbf{Z} | \exists n \in \mathbf{Z}, m = n^2\}$. Soit $m \in \mathbf{Z}, \exists n \in \mathbf{Z}, m = n^2$. Alors $m \geq 0$ d'où $m \in \mathbf{N}$. Donc $h(\mathbf{Z}) \subset \mathbf{N}$.
   Par définition $f^{-1}(\{3\}) = \{n \in \mathbf{Z} | 3n+1 = 3\}$. Supposons qu'il existe $n \in f^{-1}(3)$. Alors $3n = 2$, donc 3 divise 2. C'est une contradiction, donc $f^{-1}(3) = \emptyset$.

3. f n'est pas surjective (car 3 n'a pas d'antécédent par f d'après la question précédente). Montrons que f est injective. Soient $n, m \in \mathbf{Z}$ tels que $f(n) = f(m)$. Alors $3n + 1 = 3m + 1$, donc $n = m$. Donc f est injective.

   g admet une application réciproque -c'est g d'après la question 1.- donc g est bijective.

   L'entier relatif -1 n'est pas le carré d'un entier relatif, donc il n'a pas d'antécédent par h, ainsi h n'est pas surjective. On a $h(1) = 1 = h(-1)$ donc h n'est pas injective.

Exercice 4. On note $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x = y^3\}$.

1. Γ est une partie de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a $(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow y^3 = x \Leftrightarrow y = x^{1/3}$. Ainsi, il existe un unique $y \in \mathbf{R}$ tel que $(x, y) \in \Gamma$.

   Donc, Γ est le graphe d'une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie sur $\mathbf{R}$.
2. f est définie sur son ensemble de départ donc c'est une application.
3. L'image d'un élément $x \in \mathbf{R}$ est $x^{1/3}$, on note :

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^{1/3} \ . \end{aligned}$$

4. Soit $y \in \mathbf{R}$. Alors "x est un antécédent de y par f"$(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow x = y^3$. Donc y a un unique antécédent par f (c'est $f^{-1}(y) = y^3$). Ainsi f est bijective. La réciproque de f est

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ y &\mapsto y^3 \ . \end{aligned}$$

Exercice 5. Soient $a, b \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. Supposons qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que $b = ma$ et qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $a = nb$. Alors $b = m(nb)$. Donc $b(mn-1) = 0$. Comme $b \neq 0, mn = 1$. Comme $m, n \in \mathbf{N}$, on a $m = n = 1$. Donc $a = b$.

L'assertion $((\exists m \in \mathbf{N}, b = ma) \wedge (\exists n \in \mathbf{N}, a = nb)) \Rightarrow a = b$ est démontrée.

Exercice 6. Soit E un ensemble non vide et soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$.

Supposons que f est injective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in E$. Alors $f(f(y)) = f(y)$. Or f est injective donc $f(y) = y$. Donc y est l'antécédent de y par f. Ainsi f est surjective.

Supposons que f est surjective. Montrons que f est injective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Par surjectivité x a un antécédent $z \in E$ et x' a un antécédent $z' \in E$. Donc $f(f(z)) = f(f(z'))$. Comme $f \circ f = f$, on a $f(z) = f(z')$. Donc $x = x'$. Ainsi f est injective.

On a donc (f est injective si et seulement si f est surjective).